Vecteurs et coordonnées

Livre p.176, 198.

Objectifs :

- Savoir déterminer et utiliser les coordonnées d'un vecteur
- Définir analytiquement la somme de deux vecteurs, le produit d'un vecteur par un réel
- Caractériser analytiquement la colinéarité de deux vecteurs

1. Coordonnées d'un vecteur

Propriété 9.1 Soit $\vec{u}$ un vecteur dont on connaît deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ dans un repère $(O; I, J)$. Alors on a :

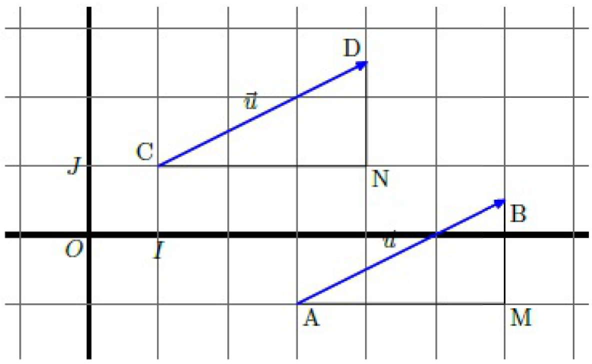
$$x_B - x_A = x_D - x_C \text{ et } y_B - y_A = y_D - y_C$$

Démonstration On se place dans le cas particulier d'un repère orthonormé.

Soit $M(x_B; y_A)$ et $N(x_D; y_C)$. Les triangles ABM et CDN sont alors rectangles respectivement en M et N et leurs hypoténuses $[AB]$ et $[CD]$ sont de même longueur.

De plus en utilisant les propriétés des angles alterne-interne, on montrerait sans trop de difficulté que $\widehat{BAM} = \widehat{DCN}$; ainsi, en utilisant les sinus et cosinus on obtient $MA = NC$ et $BM = DN$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant de même sens, les égalités de longueur se traduisent par $x_A - x_B = x_C - x_D$ et $y_A - y_B = y_C - y_D$.



Définition 9.1 En utilisant les notations de la propriété 9.1, on appelle <u>coordonnées</u> du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le couple $(x_B - x_A; y_B - y_A)$. On note :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) \text{ ou } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Remarque :

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont donc les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

Propriété 9.2 Deux vecteurs sont *égaux* si et seulement si ils ont les *mêmes coordonnées*.

Exemple :

Dans un repère $(O; I, J)$ on donne $A(-1; 1)$, $B(3; 4)$, $C(5; 2)$ et $D(1; -1)$. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 4-1 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Coordonnées de la somme de deux vecteurs

Propriété 9.3 On se place dans un repère $(O; I, J)$. Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs et leurs coordonnées dans ce repère. Alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x'; y+y')$.

Exemple :
Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, soit $A(4;1)$ et $B(2;3)$.

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
2. Le point D est tel que $OADB$ est un parallélogramme. Que peut-on dire de $\overrightarrow{OD}$ par rapport à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$? En déduire les coordonnées de D.
3. En déduire la longueur de la diagonale OD.

Solution :

1. Les coordonnées sont $\overrightarrow{OA}(4;1)$ et $\overrightarrow{OB}(2;3)$.
2. D'après la règle du parallélogramme (propriété 6.5), on a $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Donc les coordonnées de $\overrightarrow{OD}$ sont $(4+2;1+3)$ soit $\overrightarrow{OD}(6;4)$.
   Or les coordonnées de O sont $(0;0)$ donc $D(6;4)$.
3. Le repère étant orthonormé on a : $OD=\sqrt{(x_D-x_O)^2+(y_D-y_O)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}=4\sqrt{13}$.

Remarque : Dans un repère si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x; y)$, alors le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ (voir la remarque 9.1). On a donc $||\vec{u}||=||\overrightarrow{OM}||=OM$.
Ainsi, si le repère est orthonormé, on a :

$$||\vec{OM}||=\sqrt{x^2+y^2}$$

3. Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel ; vecteurs colinéaires

Propriété 9.4 Soit $(O; I, J)$ un repère du plan, λ un réel et $\vec{u}(x; y)$ un vecteur et ses coordonnées dans le repère. Alors le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x; \lambda y)$ dans ce repère.

Démonstration il suffit (à faire en exercice) d'utiliser le théorème de Thalès.

Définition 9.2 Deux vecteurs sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.
Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

Propriété 9.5 Soit A, B, C et D quatre points du plan avec $A\neq B$ et $C\neq D$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Démonstration Il suffit d'écrire que deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même direction...

Propriété 9.6 Soit A, B, C trois points du plan.
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Démonstration Les points sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont parallèles (car deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues) et donc si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Remarque :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que $\vec{u}=\lambda\vec{v}$ ou $\vec{v}=\lambda\vec{u}$.

Théorème 9.1 :
Soit $(O;I,J)$ un repère du plan et dans ce repère on donne deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$.

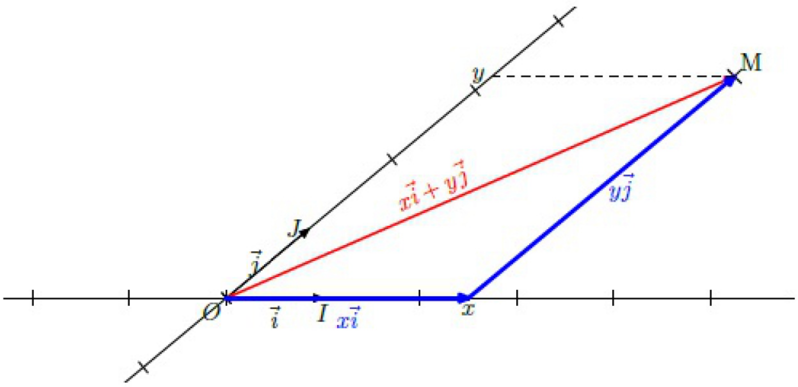
Démonstration :

- Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs colinéaires. Il existe alors $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tel que : $\vec{u}=\lambda\vec{v}$ ou $\vec{v}=\lambda\vec{u}$.
  Supposons que $\vec{u}=\lambda\vec{v}$. Alors $\left\{\begin{array}{l} x=\lambda x' \\ y=\lambda y'\end{array}\right.$. Donc :
$$xy'-x'y=(\lambda x')y'-x'(\lambda y')=\lambda x'y-\lambda x'y'=0$$
- Réciproquement, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $xy'-x'y=0$:
  - si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ;
  - si $\vec{u}\neq\vec{0}$, alors, soit x, soit y est non nul. Supposons que $x\neq 0$.
    Alors $y'=\frac{x'y}{x}$ donc $y'=\frac{x'}{x}y$. Ainsi en posant $\lambda=\frac{x'}{x}$, on a :
    $\left\{\begin{array}{l} x'=x'\times\frac{x}{x}=\frac{x'}{x}\times x=\lambda x \\ y'=\frac{x'}{x}y=\lambda y\end{array}\right.$ Donc $\vec{v}=\lambda\vec{u}$.

Exercice :
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne : $A(2;-1)$, $B(8;-4)$, $C(-1;3)$ et $D(1;2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont-ils colinéaires ? Même question pour $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Exemple :
Dans un repère $(O;I,J)$ on donne : $A(-1;1)$, $B(1;-1)$, $\vec{u}(1;1)$ et $\vec{v}(-2;1)$.
Déterminer les coordonnées de M pour que : $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ soient colinéaires} \\ \overrightarrow{BM} \text{ et } \vec{v} \text{ soient colinéaires}\end{array}\right.$
Soit $M(x;y)$ vérifiant les conditions proposées. On a :
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement si $(x+1)\times1-1\times(y-1)=0$ soit $x-y=-2$.
$\overrightarrow{BM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(x-1)\times1-(-2)\times(y+1)=0$ soit $x+2y=-1$.
On résout alors le système $\left\{\begin{array}{l} x-y=-2 \\ x+2y=-1\end{array}\right.$. On obtient $\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{5}{3} \\ y=\frac{1}{3}\end{array}\right.$. Donc $M(-\frac{5}{3};\frac{1}{3})$.

Remarque : On se place dans un repère $(O;I,J)$. On note $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$. Pour tout point $M(x;y)$, on a alors $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.
Réciproquement, si on se donne un point O et deux vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$, on peut noter I et J les points tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$. Alors le point M tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;I,J)$.



Désormais, le repère $(O;I,J)$ sera noté $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4. Quelques algorithmes

En utilisant les coordonnées, on peut écrire des algorithmes permettant de calculer les coordonnées d'un vecteur, de déterminer si deux vecteurs sont colinéaires, si deux droites sont parallèles, si trois points sont alignés, ...

Exemple :

L'algorithme 6 permet de déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ connaissant celles de A et de B.

Entrées : Demander les coordonnées $(x_A ; y_A)$ de A;
Demander les coordonnées $(x_B ; y_B)$ de B;
début
  Calculer $x = x_B - x_A$;
  Calculer $y = y_B - y_A$;
  Afficher « Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x ; y)$ » ;

Algorithme 6 : Coordonnées d'un vecteur

Exemple :

L'algorithme 7 permet de déterminer si deux vecteurs sont colinéaires et d'afficher le coefficient de colinéarité (s'il existe).

Entrées : Demander les coordonnées $(x ; y)$ de $\vec{u}$;
Demander les coordonnées $(x' ; y')$ de $\vec{v}$;
début
  Calculer $r = xy' - x'y$;
  si $r = 0$ **alors**
    Afficher « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires » ;
    si $x \neq 0$ **alors**
      Calculer $\lambda = \frac{x'}{x}$;
      Afficher « Et $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ » ;
    sinon
      si $x' \neq 0$ **alors**
        Calculer $\lambda = \frac{x}{x'}$;
        Afficher « Et $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ » ;
  sinon
    Afficher « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires » ;

Algorithme 7 : Vecteurs colinéaires ?

Exemple :

Écrire un algorithme qui, connaissant les coordonnées de trois points dans un repère détermine si ces points sont alignés.

5. Synthèse sur les vecteurs et leurs coordonnées

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....